Тема лекции: Функция нескольких переменных. Область определения. Линии уровня. Частные производные функции двух переменных

Цель лекции: Сформировать у студентов понимание основных понятий функций нескольких переменных, их области определения, линий уровня, а также методов нахождения частных производных.

Основные вопросы:

1. **Понятие функции нескольких переменных.**
2. **Область определения функции двух переменных.**
3. **Линии уровня и их геометрическая интерпретация.**
4. **Частные производные функции двух переменных и их вычисление.**

Определение. Соответствие f, которое каждой паре чисел (x, y) єD сопоставляет одно и только одно число z є R, называется фуккцией двух переменных и записывается в виде z = f(x; y) .

При этом x и y называются независимыми переменными (аргументами), а z - зависимой переменной. Множество D = D(f) называется областью определения функции. Множество значений z , называется областью изменения этой функции, обозначается E(f) или E. Областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями.

Геометрический смысл функции двух переменных. График функции двух переменных представляет поверхность в трёхмерном пространстве. Поверхность – это плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Cz = -Ax - By - D \quad \Rightarrow \quad z = f(x;y) = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Определение: Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется линия $f(x;y) = C$ на плоскости XOY , в каждой точке которой функция сохраняет постоянное значение: $z = C = const$

Пример 1. Найти и построить несколько линий уровня графика функции

$z = (x-2)^2 + (y-1)^2$

Решение. Очевидно, что в данном случае «z» (высота) заведомо не может принимать отрицательные значения (так как сумма квадратов неотрицательна). Таким образом, поверхность располагается в верхнем полупространстве (над плоскостью).

1) Исследуем поверхность на нулевой высоте, для этого поставим значение $z = 0$ в равенство $(x-2)^2 + (y-1)^2 = z$:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$

Решением данного уравнения является точка $(2;1)$. . То есть, при $z=0$ линия уровня представляет собой точку.

2) Поднимаемся на единичную высоту и «рассекаем» нашу поверхность плоскостью $z=1$ (подставляем в уравнение поверхности):

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$

Таким образом, для высоты $z=1$ линия уровня представляет собой окружность с центром в точке $(2;1)$ единичного радиуса R=1.

(Напоминаю, что все «срезы» проецируются на плоскость , и поэтому у точек я записываю две, а не три координаты!)

3) Теперь берём, например, плоскость $z=3$, тогда поучаем (подставляем в уравнение поверхности):

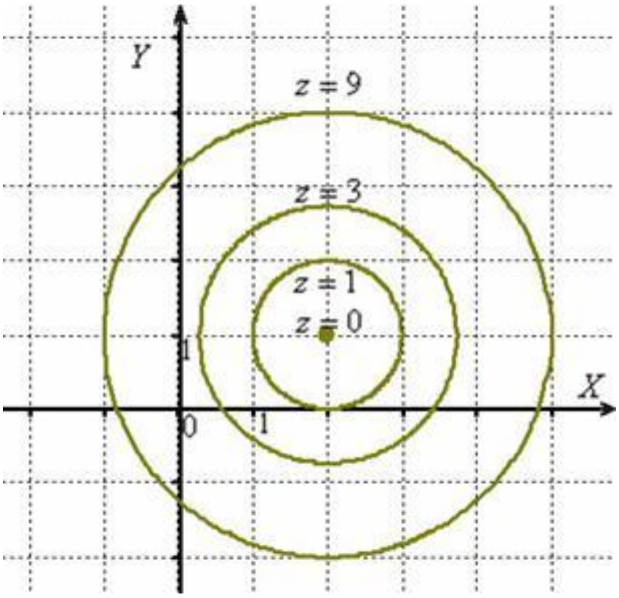
$$(x-2)^2+(y-1)^2=3$$

Таким образом, для высоты $z=3$ линия уровня представляет собой окружность с центром в точке $(2;1)$ радиуса R=$\sqrt{3}$

4) И, построим ещё одну линию уровня для $z=9$:

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$ – окружность с центром в точке $(2;1)$ радиуса R=3.

(Линии уровня располагаются на плоскости , но каждая линия подписывается – какой высоте она соответствует:)



Определение. Число A называется пределом функции z = f(x; y) при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0 ; y_0)$), если для любого ε>0 существует $\delta > 0$ такое, что для всех x и y ($x \neq x_0$ и $y \neq y_0$) и удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Записывают: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$

Частные производные первого порядка. Пусть задана функция z = f(x; y).

Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx: x+ Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение $\Delta_x z$, которое называется частным приращением z по x и обозначается. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Опред. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

то он называется частной производной функции z = f(x; y) по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x \ , f'_x \ , \frac{\partial z}{\partial x} \ , \frac{\partial f}{\partial x}$$

Частные производные по x в точке $M_0\ (x_0, y_0)$ обычно обозначают символами

$$f'_x(x_0, y_0)\ , f'_x|_{M_0}$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная от z = f(x;y) по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Если z'_x и z'_y дифференцируемые функции,

то можно вычислить частные производные

второго порядка. Их четыре

$z''_{xx} = (z'_x)'_x$ $z''_{xy} = (z'_x)'_y$ – смешанная производная

$z''_{yy} = (z'_y)'_y$ $z''_{yx} = (z'_y)'_x$ – смешанная производная

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции нескольких переменных.
2. Что называется областью определения функции двух переменных?

3. Как определяется линия уровня функции?
4. Запишите определение частной производной по x и по y.
5. Какие геометрические объекты могут служить линиями уровня?
6. Как вычислить частную производную для конкретной функции?

Рекомендуемая литература:

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы математического анализа.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального анализа, т. 1–2.
4. Краснов М.Л. Сборник задач по математическому анализу.
5. Апостол Т. Математический анализ, том 1.